

1 Biot–Savart

Das Magnetfeld $\mathbf{B}$ am Ort $\mathbf{r}$ eines stromdurchflossenen Leiters ergibt sich zu

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{j}$ die Stromdichte am Ort $\mathbf{r}'$ und μ_0 die magnetische Feldkonstante.

2 Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2} \quad (2)$$

3 Die vier Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \quad (4)$$

4 Wellengleichung

Im Vakuum gelten $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$, womit sich die Maxwellgleichungen zu

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \quad (8)$$

reduzieren. Nach erneuter Anwendung der Rotation auf (7) ergibt sich

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times (-\partial_t \mathbf{B}). \quad (9)$$

Nach dem Satz von Schwarz lassen sich die partiellen Ableitungen vertauschen, was zu

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\partial_t (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (10)$$

führt. Wir setzen auf der rechten Seite (8) ein:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{E}. \quad (11)$$

Aus der linken Seite wird mit

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \quad (12)$$

und Ausnutzen von (5)

$$-\Delta \mathbf{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{E}. \quad (13)$$

Dies ist die Wellengleichung für das elektrische Feld, in der sich die Lichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (14)$$

identifizieren lässt. Damit können wir

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (15)$$

schreiben.

5 Wellengleichung

Ebene Welle:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A = 0 \quad (16)$$

Eine Lösung:

$$A = A_0 \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)) \quad (17)$$

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit:

$$v_{\text{Gr}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \qquad v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k} \quad (18)$$

6 Multipolentwicklung

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} Q_{kl} \frac{r_k r_l}{r^5} + \dots \right), \quad (19)$$

wobei

$$Q_{kl} = \sum_{i=1}^n q_i (3r_{ik}r_{il} - r_i^2 \delta_{kl}) . \quad (20)$$

7 Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (21)$$

8 Harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (22)$$

Reelle Lösung:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) , \quad (23)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} . \quad (24)$$