

V16516

## **Die schiefe Ebene**

Joshua Luckey  
joshua.luckey@udo.edu

PeP et al.: Toolbox Workshop  
pep-toolbox.physik@lists.tu-dortmund.de

Durchführung: 29.09.2023

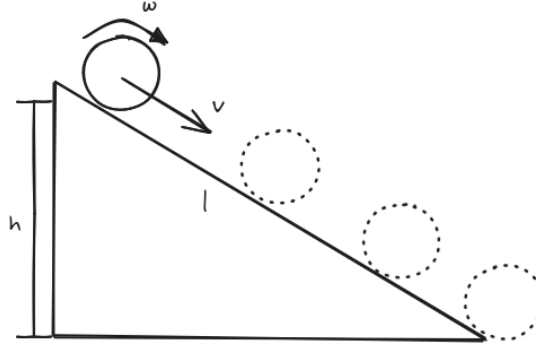
Abgabe: 04.10.2024

## **Inhaltsverzeichnis**

|          |                                                                  |           |
|----------|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Theorie</b>                                                   | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Durchführung</b>                                              | <b>4</b>  |
| <b>3</b> | <b>Auswertung</b>                                                | <b>5</b>  |
| 3.1      | Bestimmung der Fallbeschleunigung . . . . .                      | 5         |
| 3.2      | Bestimmung der Trägheitsmomente von Kugel und Zylinder . . . . . | 5         |
| <b>4</b> | <b>Diskussion</b>                                                | <b>11</b> |
|          | <b>Literatur</b>                                                 | <b>11</b> |

# 1 Theorie

Wie in der Abbildung Abbildung 1 veranschaulicht, beginnen die Objekte in einer Höhe  $h$  auf der schiefen Ebene in vollkommener Ruhe.



**Abbildung 1:** Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus. Das runde Objekt (Kugel oder Zylinder) wird in der Höhe  $h$  auf eine schiefe Ebene gelegt, sodass es aus der Ruhe herabrollt. Die Bewegung ist beschleunigt, sodass sowohl die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  sowie die Winkelgeschwindigkeit  $\omega(t)$  nicht konstant sind.

Zwischen Ebene und Objekten wirkt eine nicht zu vernachlässigende Reibung, wodurch die Objekte nach dem loslassen in Rotation versetzt werden, also tatsächlich herabrollen. Thermische Reibungsverluste werden jedoch vernachlässigt, sodass Energieerhaltung angenommen werden kann. Nach dieser gilt

$$\begin{aligned} E_i^{\text{pot}} &= E_f^{\text{kin}} + E_f^{\text{rot}} \\ mgh &= \frac{m}{2}v^2 + \frac{I}{2}\omega^2 \quad | \quad \omega = \frac{v}{r} \\ mgh &= \frac{m}{2}v^2 + \frac{I}{2}\frac{v^2}{r^2} \quad | : mgh \\ 1 &= \frac{v^2}{2gh} \left( 1 + \frac{I}{mr^2} \right) \end{aligned}$$

aus der Kinematik [3] ist bekannt, dass die Endgeschwindigkeit einer beschleunigten Bewegung (in der Zeit  $t$ , entlang einer Strecke  $l$ )  $v = \frac{2l}{t}$  ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} 1 &= \left( \frac{2l}{t} \right)^2 \frac{1}{2gh} \left( 1 + \frac{I}{mr^2} \right) \quad | \cdot t^2 \\ t^2 &= \frac{2l^2}{gh} \left( 1 + \frac{I}{mr^2} \right) \end{aligned} \tag{1}$$

Aus (1) ergeben sich dann die jeweiligen Ausgleichsfunktionen für beide Versuchsteile.

Für die Bestimmung der Trägheitsmomente wird nur noch die Quadratwurzel von (1) berechnet und ein Startzeit als Parameter hinzugefügt,

$$t(h) = \sqrt{\frac{2l^2}{gh} \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} + t_0. \quad (2)$$

Dabei sind das Trägheitsmoment  $I$  und die Startzeit  $t_0$  die Parameter für die Ausgleichsrechnung.

Für die Bestimmung der Gravitationsbeschleunigung  $g$  unter Annahme der theoretischen Trägheitsmomente für Kugel  $I_K$  und Hohlzylinder  $I_Z$

$$I_K = \frac{2}{5}mr_K^2 \qquad I_Z = \frac{m}{2} \left( r_{Z,\text{innen}}^2 + r_{Z,\text{außen}}^2 \right),$$

ergeben sich die folgenden Ausgleichsfunktionen

$$t_K(h) = \sqrt{\frac{2l^2}{gh} \left(\frac{7}{5}\right)} + t_0 \quad (3)$$

und

$$t_Z(h) = \sqrt{\frac{l^2}{gh} \left( 3 + \left( \frac{r_{Z,\text{innen}}}{r_{Z,\text{außen}}} \right)^2 \right)} + t_0. \quad (4)$$

Dabei sind in diesen Gleichungen  $g$  und  $t_0$  die Ausgleichsparameter.

## 2 Durchführung

Wie in der Anleitung [1] beschrieben, wird der Versuch wie folgt durchgeführt.

Wie einst von Galileo Galilei [2, S. 232] persönlich, wurden im hier beschriebenen Versuch Objekte (eine Kugel und Holzzylinder in Form eines Glases) eine schiefe Ebene hinab gerollt.

Notiert wird dabei die Starthöhen  $h$ . Der Prozess des Herabrollens wird mit einer Kamera aufgezeichnet, um aus der Zeit  $t$  bis zum Erreichen des Endes der schiefen Ebene möglichst genau aus den Einzelbildern (frames) des Films ablesen zu können.

Die aufgenommenen Messdaten werden für zwei unabhängige Zwecke verwendet:

1. Bestimmung der Fallbeschleunigung  $g$ , dafür werden die theoretischen Trägheitsmomente angenommen.
2. Bestimmung der Trägheitsmomente  $I$  der beiden Objekte unter Annahme der theoretischen Fallbeschleunigung.

### 3 Auswertung

Die für diesen Versuch relevanten physikalischen Größen für Kugel und Zylinder sind:

$$\begin{aligned} m_Z &= (0,1860 \pm 0,0010) \text{ kg} & m_K &= (0,2160 \pm 0,0010) \text{ kg} \\ r_{Z,i} &= (0,0357 \pm 0,0010) \text{ m} & r_K &= (0,04854 \pm 0,00016) \text{ m} \\ r_{Z,a} &= (0,03867 \pm 0,00016) \text{ m} \end{aligned} \quad (5)$$

Berechnet wurde aus diesen Größen das jeweilige, theoretische Trägheitsmoment

$$I_Z = (2,57 \pm 0,07) \text{ kg cm}^2 \quad \text{und} \quad I_K = (2,036 \pm 0,016) \text{ kg cm}^2 \quad (6)$$

Aus den aufgenommenen Videos der Versuche wurden die in Tabelle 1 folgenden Frameindizes extrahiert. Die ebenfalls aufgeführte Zeitdauer  $t$  wurde dann jeweils aus der aus dem Startframeindex  $F_i$ , dem Endframeindex  $F_f$  und der Kameraframerate  $\text{fps} = 30 \text{ s}^{-1}$  wie folgt berechnet

$$t = (F_f - F_i) \cdot \text{fps}^{-1}$$

Durch Mittelung der Messwerte für die selbe Höhe  $h$  ergeben sich die Werte in Tabelle 2. Diese Werte werden für die folgenden Auswertungsschritte verwendet.

#### 3.1 Bestimmung der Fallbeschleunigung

Für die Bestimmung der Fallbeschleunigung wurden eine Ausgleichsfunktion der Form (3) respektive (4) an die Messwerte aus Tabelle 2 angepasst. Die Daten und Ausgleichsfunktion sind für die Kugel in Abbildung 2 und für den Zylinder in Abbildung 3 graphisch dargestellt.

Die Parameter der Ausgleichsrechnung ergeben sich für die Kugel zu

$$g_K = (10,0 \pm 0,5) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{und} \quad t_{0,K} = (-0,148 \pm 0,033) \text{ s} \quad (7)$$

und für den Zylinder

$$g_Z = (11,2 \pm 0,5) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{und} \quad t_{0,Z} = (-0,135 \pm 0,033) \text{ s}. \quad (8)$$

#### 3.2 Bestimmung der Trägheitsmomente von Kugel und Zylinder

Für die Bestimmung der Fallbeschleunigung wurden eine Ausgleichsfunktion der Form (2) an die Messwerte aus Tabelle 2 angepasst. Die Daten und Ausgleichsfunktion sind für die Kugel in Abbildung 4 und für den Zylinder in Abbildung 5 graphisch dargestellt.

Die Parameter der Ausgleichsrechnung ergeben sich für die Kugel zu

$$I_K = (1,9 \pm 0,4) \text{ kg cm}^2 \quad \text{und} \quad t_{0,K} = (-0,148 \pm 0,033) \text{ s} \quad (9)$$

und für den Zylinder

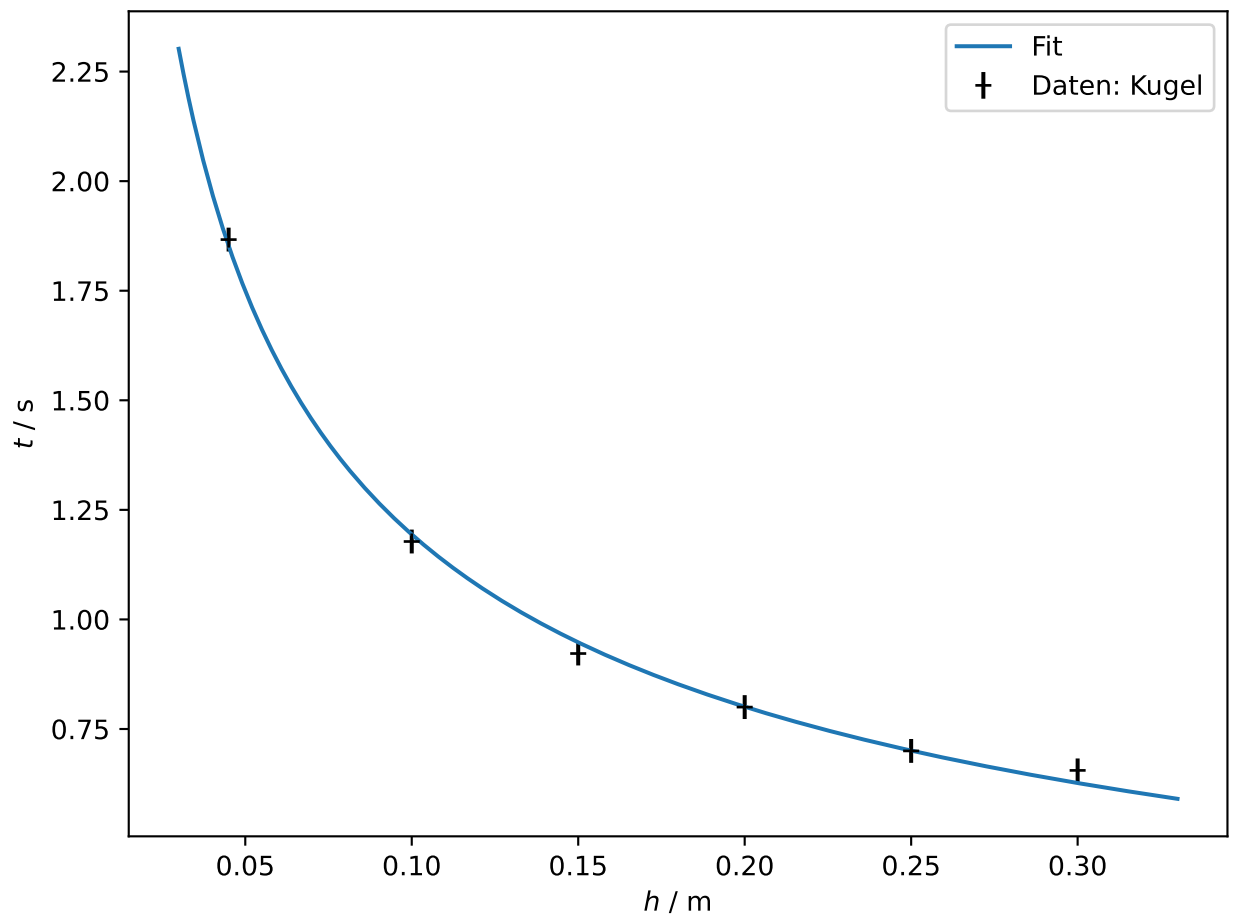
$$I_Z = (1,90 \pm 0,23) \text{ kg cm}^2 \quad \text{und} \quad t_{0,Z} = (-0,135 \pm 0,033) \text{ s}. \quad (10)$$

**Tabelle 1:** Alle aufgenommenen Werte, das heißt mit dreifach wiederholter Messungen je Höhe.

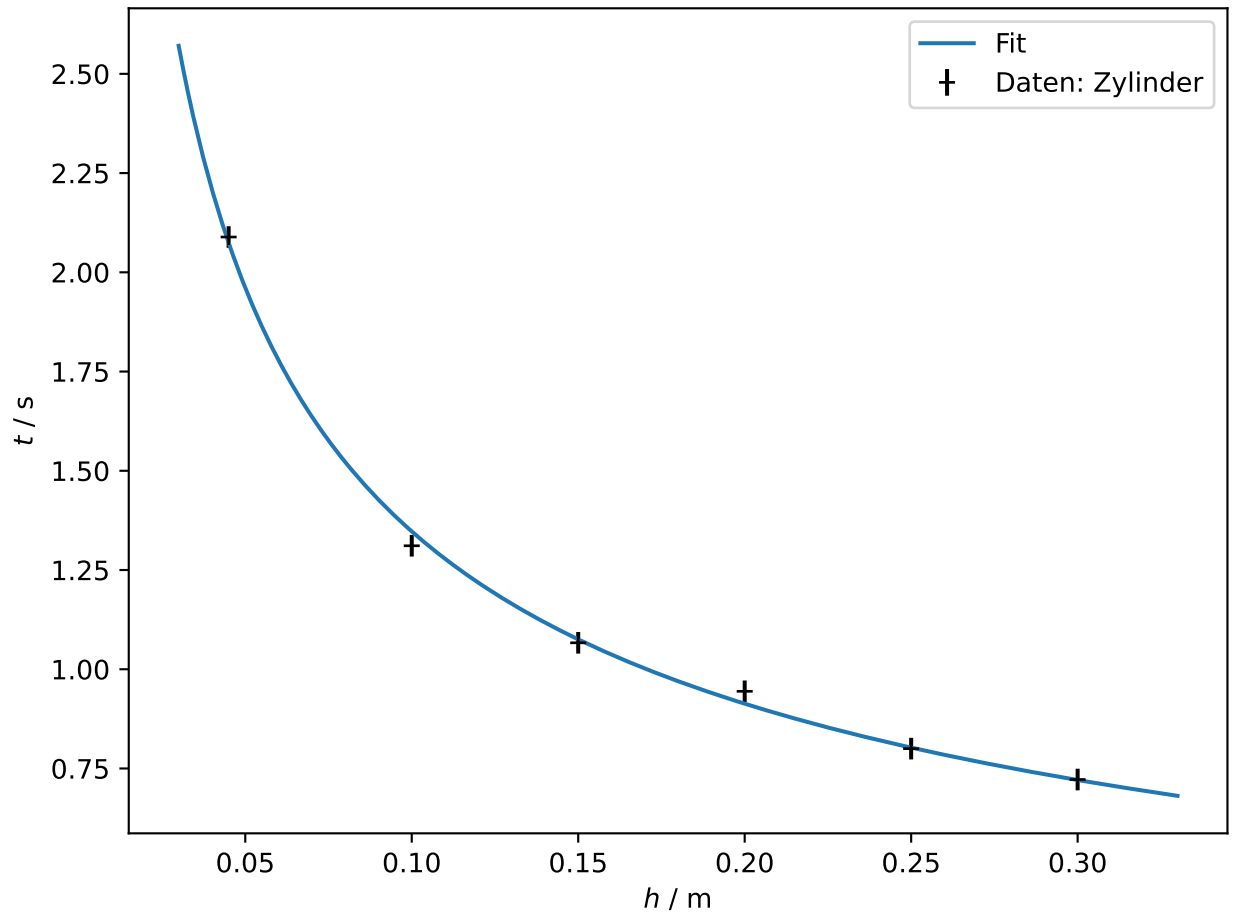
| $h / \text{m}$ | Messung: Kugel |             |                   | Messung: Zylinder |              |                   |
|----------------|----------------|-------------|-------------------|-------------------|--------------|-------------------|
|                | $F_i / 1$      | $F_f / 1$   | $t / \text{s}$    | $F_i / 1$         | $F_f / 1$    | $t / \text{s}$    |
| 0,045          | $436 \pm 1$    | $492 \pm 1$ | $1,867 \pm 0,047$ | $1018 \pm 1$      | $1083 \pm 1$ | $2,167 \pm 0,047$ |
| 0,045          | $555 \pm 1$    | $610 \pm 1$ | $1,833 \pm 0,047$ | $1189 \pm 1$      | $1248 \pm 1$ | $1,967 \pm 0,047$ |
| 0,045          | $672 \pm 1$    | $729 \pm 1$ | $1,900 \pm 0,047$ | $1340 \pm 1$      | $1404 \pm 1$ | $2,133 \pm 0,047$ |
| 0,100          | $95 \pm 1$     | $130 \pm 1$ | $1,167 \pm 0,047$ | $596 \pm 1$       | $636 \pm 1$  | $1,333 \pm 0,047$ |
| 0,100          | $199 \pm 1$    | $235 \pm 1$ | $1,200 \pm 0,047$ | $762 \pm 1$       | $801 \pm 1$  | $1,300 \pm 0,047$ |
| 0,100          | $303 \pm 1$    | $338 \pm 1$ | $1,167 \pm 0,047$ | $882 \pm 1$       | $921 \pm 1$  | $1,300 \pm 0,047$ |
| 0,150          | $91 \pm 1$     | $119 \pm 1$ | $0,933 \pm 0,047$ | $574 \pm 1$       | $605 \pm 1$  | $1,033 \pm 0,047$ |
| 0,150          | $201 \pm 1$    | $229 \pm 1$ | $0,933 \pm 0,047$ | $766 \pm 1$       | $798 \pm 1$  | $1,067 \pm 0,047$ |
| 0,150          | $335 \pm 1$    | $362 \pm 1$ | $0,900 \pm 0,047$ | $863 \pm 1$       | $896 \pm 1$  | $1,100 \pm 0,047$ |
| 0,200          | $232 \pm 1$    | $256 \pm 1$ | $0,800 \pm 0,047$ | $679 \pm 1$       | $707 \pm 1$  | $0,933 \pm 0,047$ |
| 0,200          | $323 \pm 1$    | $347 \pm 1$ | $0,800 \pm 0,047$ | $810 \pm 1$       | $838 \pm 1$  | $0,933 \pm 0,047$ |
| 0,200          | $397 \pm 1$    | $421 \pm 1$ | $0,800 \pm 0,047$ | $930 \pm 1$       | $959 \pm 1$  | $0,967 \pm 0,047$ |
| 0,250          | $153 \pm 1$    | $174 \pm 1$ | $0,700 \pm 0,047$ | $650 \pm 1$       | $674 \pm 1$  | $0,800 \pm 0,047$ |
| 0,250          | $239 \pm 1$    | $260 \pm 1$ | $0,700 \pm 0,047$ | $892 \pm 1$       | $917 \pm 1$  | $0,833 \pm 0,047$ |
| 0,250          | $322 \pm 1$    | $343 \pm 1$ | $0,700 \pm 0,047$ | $804 \pm 1$       | $827 \pm 1$  | $0,767 \pm 0,047$ |
| 0,300          | $219 \pm 1$    | $238 \pm 1$ | $0,633 \pm 0,047$ | $642 \pm 1$       | $664 \pm 1$  | $0,733 \pm 0,047$ |
| 0,300          | $319 \pm 1$    | $338 \pm 1$ | $0,633 \pm 0,047$ | $739 \pm 1$       | $760 \pm 1$  | $0,700 \pm 0,047$ |
| 0,300          | $391 \pm 1$    | $412 \pm 1$ | $0,700 \pm 0,047$ | $900 \pm 1$       | $922 \pm 1$  | $0,733 \pm 0,047$ |

**Tabelle 2:** Für gleiche Starthöhe  $h$  gemittelte Messwerte der Zeit  $t$ .

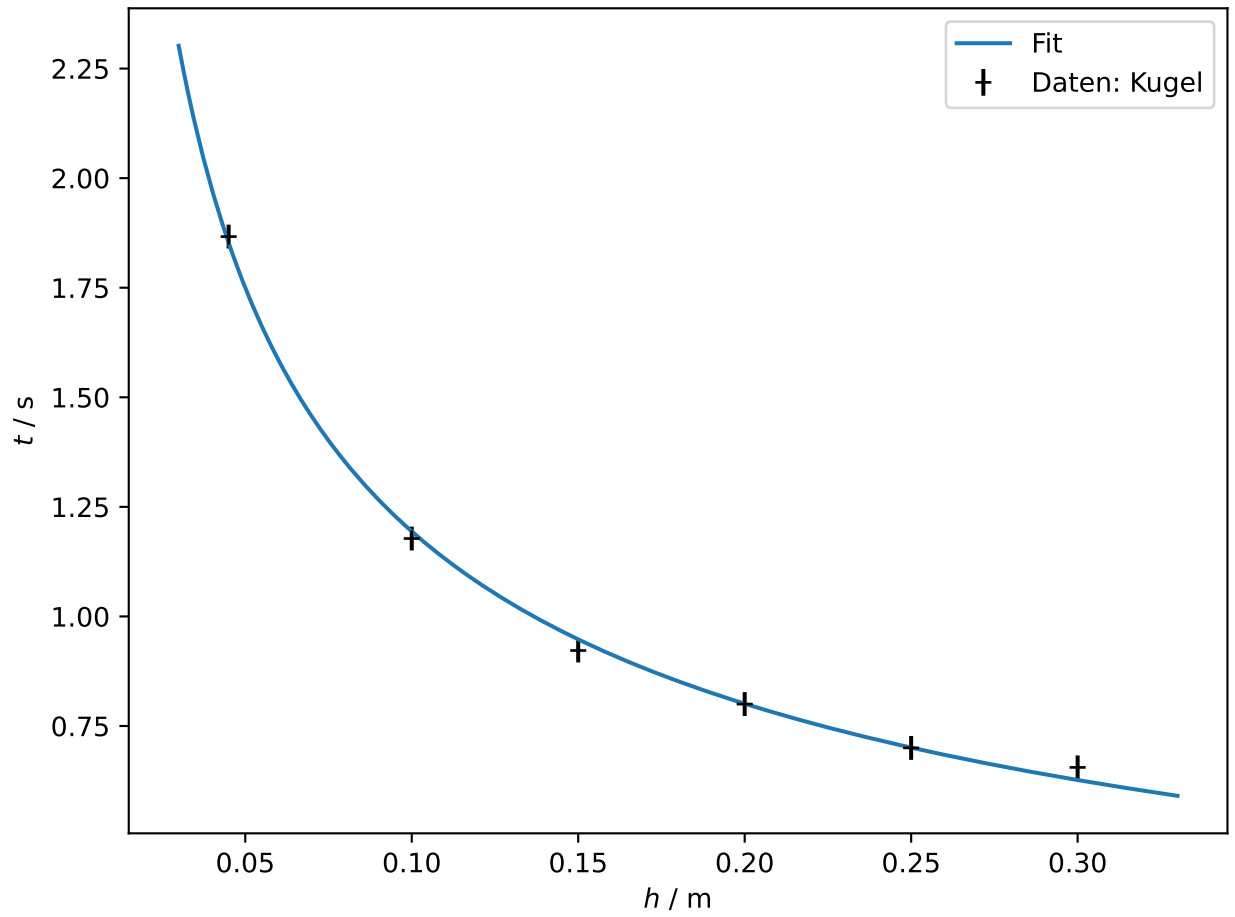
| $h / \text{m}$ | Messung: Kugel    | Messung: Zylinder |
|----------------|-------------------|-------------------|
|                | $t / \text{s}$    | $t / \text{s}$    |
| 0,045          | $1,867 \pm 0,027$ | $2,089 \pm 0,027$ |
| 0,100          | $1,178 \pm 0,027$ | $1,311 \pm 0,027$ |
| 0,150          | $0,922 \pm 0,027$ | $1,067 \pm 0,027$ |
| 0,200          | $0,800 \pm 0,027$ | $0,944 \pm 0,027$ |
| 0,250          | $0,700 \pm 0,027$ | $0,800 \pm 0,027$ |
| 0,300          | $0,656 \pm 0,027$ | $0,722 \pm 0,027$ |



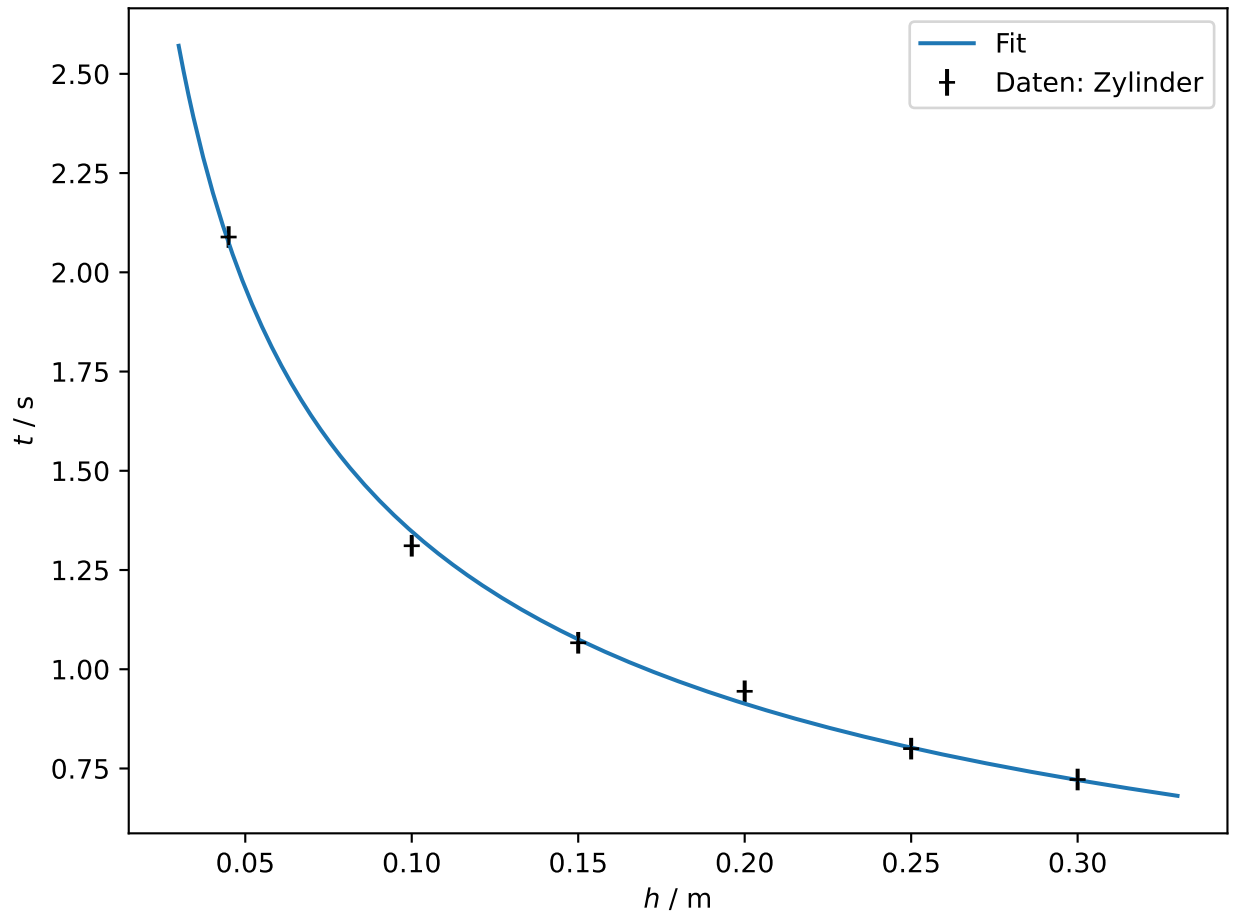
**Abbildung 2:** Dargestellt sind die für je eine Höhe gemittelten Messwerte aus Tabelle 2 für die Kugel, zusammen mit einer Ausgleichsfunktion der Form (3) für die Bestimmung der Fallbeschleunigung  $g$ . Die Parameter der Ausgleichsrechnung sind in (7) angegeben.



**Abbildung 3:** Dargestellt sind die für je eine Höhe gemittelten Messwerte aus Tabelle 2 für den Zylinder, zusammen mit einer Ausgleichsfunktion der Form (4) für die Bestimmung der Fallbeschleunigung  $g$ . Die Parameter der Ausgleichsrechnung sind in (8) angegeben.



**Abbildung 4:** Dargestellt sind die für je eine Höhe gemittelten Messwerte aus Tabelle 2 für den Kugel, zusammen mit einer Ausgleichsfunktion der Form (2) für die Bestimmung des Trägheitsmoments  $I_K$ . Die Parameter der Ausgleichsrechnung sind in (9) angegeben.



**Abbildung 5:** Dargestellt sind die für je eine Höhe gemittelten Messwerte aus Tabelle 2 für den Zylinder, zusammen mit einer Ausgleichsfunktion der Form (2) für die Bestimmung des Trägheitsmoments  $I_Z$ . Die Parameter der Ausgleichsrechnung sind in (10) angegeben.

## 4 Diskussion

TODO: Diskussion fertig machen ;-)

Notizen:

Bestimmung von  $g$ :

Fits

Abbildung 2

Abbildung 3

passen zu den Messwerten.

Die Fit parameter (7) (8)

passen zum theoretischen Wert  $9,81 \text{ m/s}^2 \Rightarrow$  TODO: Abweichungen berechnen

Die übereinstimmung der Fitparameter  $t_0$ , weist auf eine systematische Unsicherheit

$\Rightarrow$  TODO: Berechnung des Offsets in Frames

Analog für die Bestimmung von  $I$ :

Fits:

Abbildung 4

Abbildung 5

(9)

(10)

(6)

$\Rightarrow$  TODO: Abweichungen berechnen

## Literatur

- [1] *Anleitung: Versuch zur schiefen Ebene*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.
- [2] Galileo Galilei. *Il Saggiatore*. 1623. URL: <https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=354802&seq=13>.
- [3] Friedhelm Kuypers. *Klassische Mechanik*. John Wiley & Sons, 2016.