V16516

Die schiefe Ebene

Joshua Luckey
joshua.luckey@udo.edu

PeP et al.: Toolbox Workshop
pep-toolbox.physik@lists.tu-dortmund.de

Durchführung: 29.09.2023 Abgabe: 04.10.2024

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie **3**

2 Durchführung **4**

3 Auswertung **5**

3.1 Bestimmung der Fallbeschleunigung 5

3.2 Bestimmung der Trägheitsmomente von Kugel und Zylinder 5

4 Diskussion **11**

Literatur **11**

1 Theorie

Wie in der Abbildung Abbildung 1 veranschaulicht, beginnen die Objekte in einer Höhe h auf der schiefen Ebene in vollkommener Ruhe.

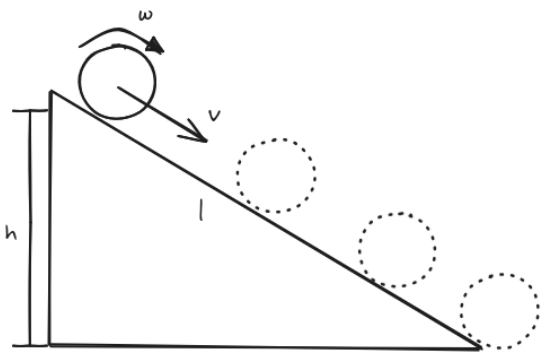

Abbildung 1: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus. Das runde Objekt (Kugel oder Zylinder) wird in der Höhe h auf eine schiefe Ebene gelegt, sodass es aus der Ruhe herabrollt. Die Bewegung ist beschleunigt, sodass sowohl die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ sowie die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ nicht konstant sind.

Zwischen Ebene und Objekten wirkt eine nicht zu vernachlässigende Reibung, wodurch die Objekte nach dem loslassen in Rotation versetzt werden, also tatsächlich herabrollen. Thermische Reibungsverluste werden jedoch vernächlässigt, sodass Energieerhaltung angenommen werden kann. Nach dieser gilt

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{i}}^{\mathrm{pot}} &= E_{\mathrm{f}}^{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{f}}^{\mathrm{rot}} \\
mgh &= \frac{m}{2}v^2 + \frac{I}{2}\omega^2 \quad \Big| \omega = \frac{v}{r} \\
mgh &= \frac{m}{2}v^2 + \frac{I}{2}\frac{v^2}{r^2} \quad \Big| : mgh \\
1 &= \frac{v^2}{2gh}\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)
\end{aligned}$$

aus der Kinematik [3] ist bekannt, dass die Endgeschwindigkeit einer beschleunigten Bewegung (in der Zeit t, entlang einer Strecke l) $v = \frac{2l}{t}$ ist. Es gilt also

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{2l}{t}\right)^2 \frac{1}{2gh}\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) \quad \Big| \cdot t^2 \\
t^2 &= \frac{2l^2}{gh}\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Aus (1) ergeben sich dann die jeweiligen Ausgleichsfunktionen für beide Versuchsteile.

Für die Bestimmung der Trägheitsmomente wird nur noch die Quadratwurzel von (1) berechnet und ein Startzeit als Parameter hinzugefügt,

$$t(h) = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} + t_0. \tag{2}$$

Dabei sind das Trägheitsmoment I und die Startzeit t_0 die Parameter für die Ausgleichsrechnung.

Für die Bestimmung der Gravitationsbeschleunigung g unter Annahme der theoretischen Trägheitsmomente für Kugel I_K und Hohlzylinder I_Z

$$I_\mathrm{K} = \frac{2}{5} m r_\mathrm{K}^2 \qquad\qquad I_\mathrm{Z} = \frac{m}{2}\left(r_\mathrm{Z,innen}^2 + r_\mathrm{Z,außen}^2)\right),$$

ergeben sich die folgenden Ausgleichsfunktionen

$$t_\mathrm{K}(h) = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}\left(\frac{7}{5}\right)} + t_0 \tag{3}$$

und

$$t_\mathrm{Z}(h) = \sqrt{\frac{l^2}{gh}\left(3 + \left(\frac{r_\mathrm{Z,innen}}{r_\mathrm{Z,außen}}\right)^2\right)} + t_0. \tag{4}$$

Dabei sind in diesen Gleichungen g und t_0 die Ausgleichsparameter.

2 Durchführung

Wie in der Anleitung [1] beschrieben, wird der Versuch wie folgt durchgeführt.

Wie einst von Galileo Galilei [2, S. 232] persönlich, wurden im hier beschriebenen Versuch Objekte (eine Kugel und Holzylinder in Form eines Glases) eine schiefe Ebene hinab gerollt.

Notiert wird dabei die Starthöhen h. Der Prozess des Herabrollens wird mit einer Kamera aufgezeichnet, um aus der Zeit t bis zum erreichen des Endes der schiefen Ebene möglichst genau aus den Einzelbildern (frames) des Films ablesen zu können.

Die aufgenommenen Messdaten werden für zwei unabhängige Zwecke verwendet:

1. Bestimmung der Fallbeschleunigung g, dafür werden die theoretischen Trägheitsmomente angenommen.

2. Bestimmung der Trägheitsmomente I der beiden Objekte unter Annahme der theoretischen Fallbeschleunigung.

3 Auswertung

Die für diesen Versuch relevanten physikalischen Größen für Kugel und Zylinder sind:

$$\begin{aligned} m_\mathrm{Z} &= (0{,}1860 \pm 0{,}0010)\,\mathrm{kg} & m_\mathrm{K} &= (0{,}2160 \pm 0{,}0010)\,\mathrm{kg} \\ r_\mathrm{Z,i} &= (0{,}0357 \pm 0{,}0010)\,\mathrm{m} & r_\mathrm{K} &= (0{,}048\,54 \pm 0{,}000\,16)\,\mathrm{m} \\ r_\mathrm{Z,a} &= (0{,}038\,67 \pm 0{,}000\,16)\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{5}$$

Berechnet wurde aus diesen Größen das jeweilige, theoretische Trägheitsmoment

$$I_\mathrm{Z} = (2{,}57 \pm 0{,}07)\,\mathrm{kg\,cm^2} \quad \text{und} \quad I_\mathrm{K} = (2{,}036 \pm 0{,}016)\,\mathrm{kg\,cm^2} \tag{6}$$

Aus den aufgenommenen Videos der Versuche wurden die in Tabelle 1 folgenden Frameindizes extrahiert. Die ebenfalls aufgeführte Zeitdauer t wurde dann jeweils aus der aus dem Startframeindex F_i, dem Endframeindex F_f und der Kameraframerate $\mathrm{fps} = 30\,\mathrm{s}^{-1}$ wie folgt berechnet

$$t = (F_\mathrm{f} - F_\mathrm{i}) \cdot \mathrm{fps}^{-1}$$

Durch Mittelung der Messwerte für die selbe Höhe h ergeben sich die Werte in Tabelle 2. Diese Werte werden für die folgenden Auswertungsschritte verwendet.

3.1 Bestimmung der Fallbeschleunigung

Für die Bestimmung der Fallbeschleunigung wurden eine Ausgleichsfunktion der Form (3) respektive (4) an die Messwerte aus Tabelle 2 angepasst. Die Daten und Ausgleichsfunktion sind für die Kugel in Abbildung 2 und für den Zylinder in Abbildung 3 graphisch dargestellt.

Die Parameter der Ausgleichsrechnung ergeben sich für die Kugel zu

$$g_\mathrm{K} = (10{,}0 \pm 0{,}5)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad \text{und} \quad t_{0,\mathrm{K}} = (-0{,}148 \pm 0{,}033)\,\mathrm{s} \tag{7}$$

und für den Zylinder

$$g_\mathrm{Z} = (11{,}2 \pm 0{,}5)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad \text{und} \quad t_{0,\mathrm{Z}} = (-0{,}135 \pm 0{,}033)\,\mathrm{s}. \tag{8}$$

3.2 Bestimmung der Trägheitsmomente von Kugel und Zylinder

Für die bestimmung der Fallbeschleunigung wurden eine Ausgleichsfunktion der Form (2) an die Messwerte aus Tabelle 2 angepasst. Die Daten und Ausgleichsfunktion sind für die Kugel in Abbildung 4 und für den Zylinder in Abbildung 5 graphisch dargestellt.

Die Parameter der Ausgleichsrechnung ergeben sich für die Kugel zu

$$I_\mathrm{K} = (1{,}9 \pm 0{,}4)\,\mathrm{kg\,cm^2} \quad \text{und} \quad t_{0,\mathrm{K}} = (-0{,}148 \pm 0{,}033)\,\mathrm{s} \tag{9}$$

und für den Zylinder

$$I_\mathrm{Z} = (1{,}90 \pm 0{,}23)\,\mathrm{kg\,cm^2} \quad \text{und} \quad t_{0,\mathrm{Z}} = (-0{,}135 \pm 0{,}033)\,\mathrm{s}. \tag{10}$$

Tabelle 1: Alle aufgenommenen Werte, das heißt mit dreifach wiederholter Messungen je Höhe.

	Messung: Kugel			Messung: Zylinder		
h / m	F_i / 1	F_f / 1	t / s	F_i / 1	F_f / 1	t / s
0,045	436 ± 1	492 ± 1	$1{,}867 \pm 0{,}047$	1018 ± 1	1083 ± 1	$2{,}167 \pm 0{,}047$
0,045	555 ± 1	610 ± 1	$1{,}833 \pm 0{,}047$	1189 ± 1	1248 ± 1	$1{,}967 \pm 0{,}047$
0,045	672 ± 1	729 ± 1	$1{,}900 \pm 0{,}047$	1340 ± 1	1404 ± 1	$2{,}133 \pm 0{,}047$
0,100	95 ± 1	130 ± 1	$1{,}167 \pm 0{,}047$	596 ± 1	636 ± 1	$1{,}333 \pm 0{,}047$
0,100	199 ± 1	235 ± 1	$1{,}200 \pm 0{,}047$	762 ± 1	801 ± 1	$1{,}300 \pm 0{,}047$
0,100	303 ± 1	338 ± 1	$1{,}167 \pm 0{,}047$	882 ± 1	921 ± 1	$1{,}300 \pm 0{,}047$
0,150	91 ± 1	119 ± 1	$0{,}933 \pm 0{,}047$	574 ± 1	605 ± 1	$1{,}033 \pm 0{,}047$
0,150	201 ± 1	229 ± 1	$0{,}933 \pm 0{,}047$	766 ± 1	798 ± 1	$1{,}067 \pm 0{,}047$
0,150	335 ± 1	362 ± 1	$0{,}900 \pm 0{,}047$	863 ± 1	896 ± 1	$1{,}100 \pm 0{,}047$
0,200	232 ± 1	256 ± 1	$0{,}800 \pm 0{,}047$	679 ± 1	707 ± 1	$0{,}933 \pm 0{,}047$
0,200	323 ± 1	347 ± 1	$0{,}800 \pm 0{,}047$	810 ± 1	838 ± 1	$0{,}933 \pm 0{,}047$
0,200	397 ± 1	421 ± 1	$0{,}800 \pm 0{,}047$	930 ± 1	959 ± 1	$0{,}967 \pm 0{,}047$
0,250	153 ± 1	174 ± 1	$0{,}700 \pm 0{,}047$	650 ± 1	674 ± 1	$0{,}800 \pm 0{,}047$
0,250	239 ± 1	260 ± 1	$0{,}700 \pm 0{,}047$	892 ± 1	917 ± 1	$0{,}833 \pm 0{,}047$
0,250	322 ± 1	343 ± 1	$0{,}700 \pm 0{,}047$	804 ± 1	827 ± 1	$0{,}767 \pm 0{,}047$
0,300	219 ± 1	238 ± 1	$0{,}633 \pm 0{,}047$	642 ± 1	664 ± 1	$0{,}733 \pm 0{,}047$
0,300	319 ± 1	338 ± 1	$0{,}633 \pm 0{,}047$	739 ± 1	760 ± 1	$0{,}700 \pm 0{,}047$
0,300	391 ± 1	412 ± 1	$0{,}700 \pm 0{,}047$	900 ± 1	922 ± 1	$0{,}733 \pm 0{,}047$

Tabelle 2: Für gleiche Starthöhe h gemittelte Messwerte der Zeit t.

	Messung: Kugel	Messung: Zylinder
h / m	t / s	t / s
0,045	$1{,}867 \pm 0{,}027$	$2{,}089 \pm 0{,}027$
0,100	$1{,}178 \pm 0{,}027$	$1{,}311 \pm 0{,}027$
0,150	$0{,}922 \pm 0{,}027$	$1{,}067 \pm 0{,}027$
0,200	$0{,}800 \pm 0{,}027$	$0{,}944 \pm 0{,}027$
0,250	$0{,}700 \pm 0{,}027$	$0{,}800 \pm 0{,}027$
0,300	$0{,}656 \pm 0{,}027$	$0{,}722 \pm 0{,}027$

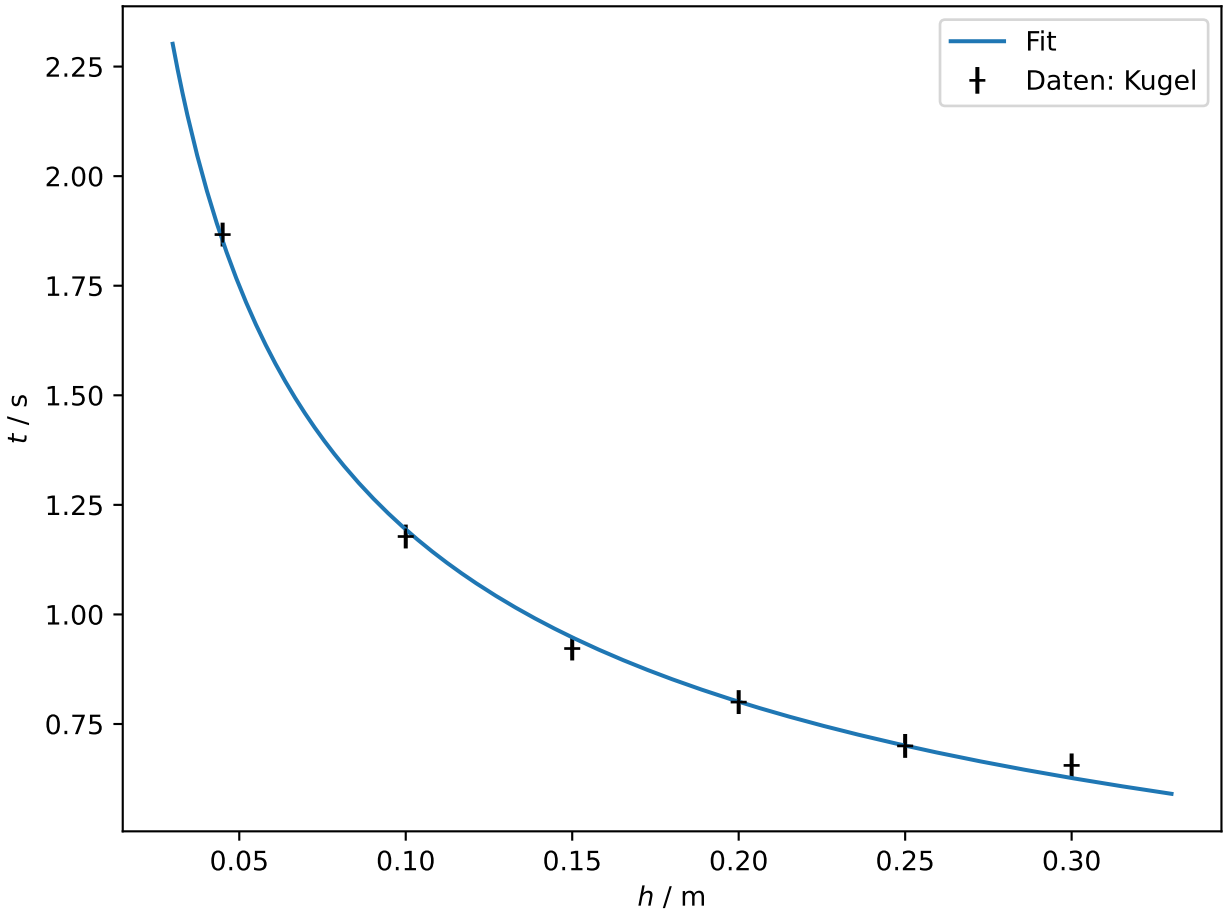

Abbildung 2: Dargestellt sind die für je eine Höhe gemittelten Messwerte aus Tabelle 2 für die Kugel, zusammen mit einer Ausgleichsfunktion der Form (3) für die Bestimmung der Fallbeschleunigung g. Die Parameter der Ausgleichsrechnung sind in (7) angegeben.

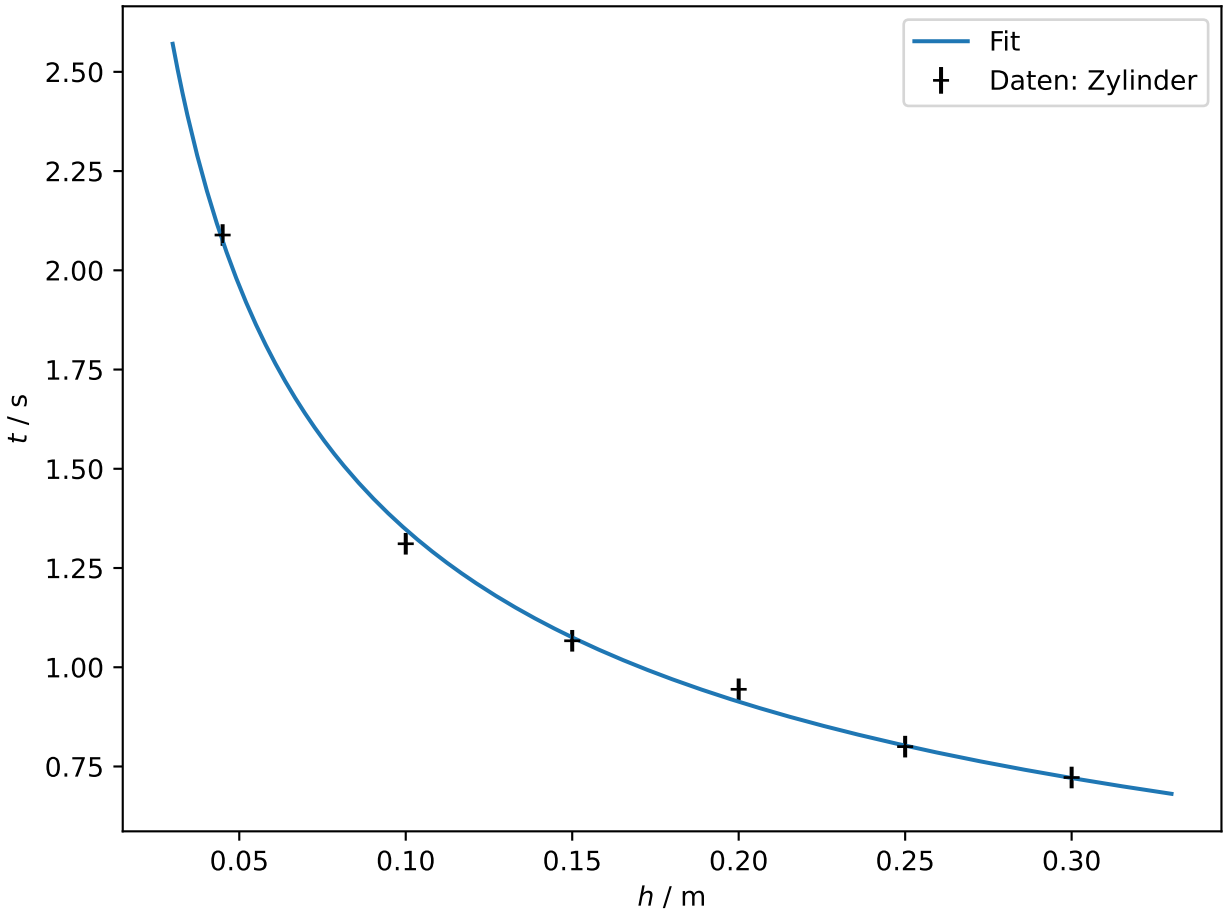

Abbildung 3: Dargestellt sind die für je eine Höhe gemittelten Messwerte aus Tabelle 2 für den Zylinder, zusammen mit einer Ausgleichsfunktion der Form (4) für die Bestimmung der Fallbeschleunigung g. Die Parameter der Ausgleichsrechnung sind in (8) angegeben.

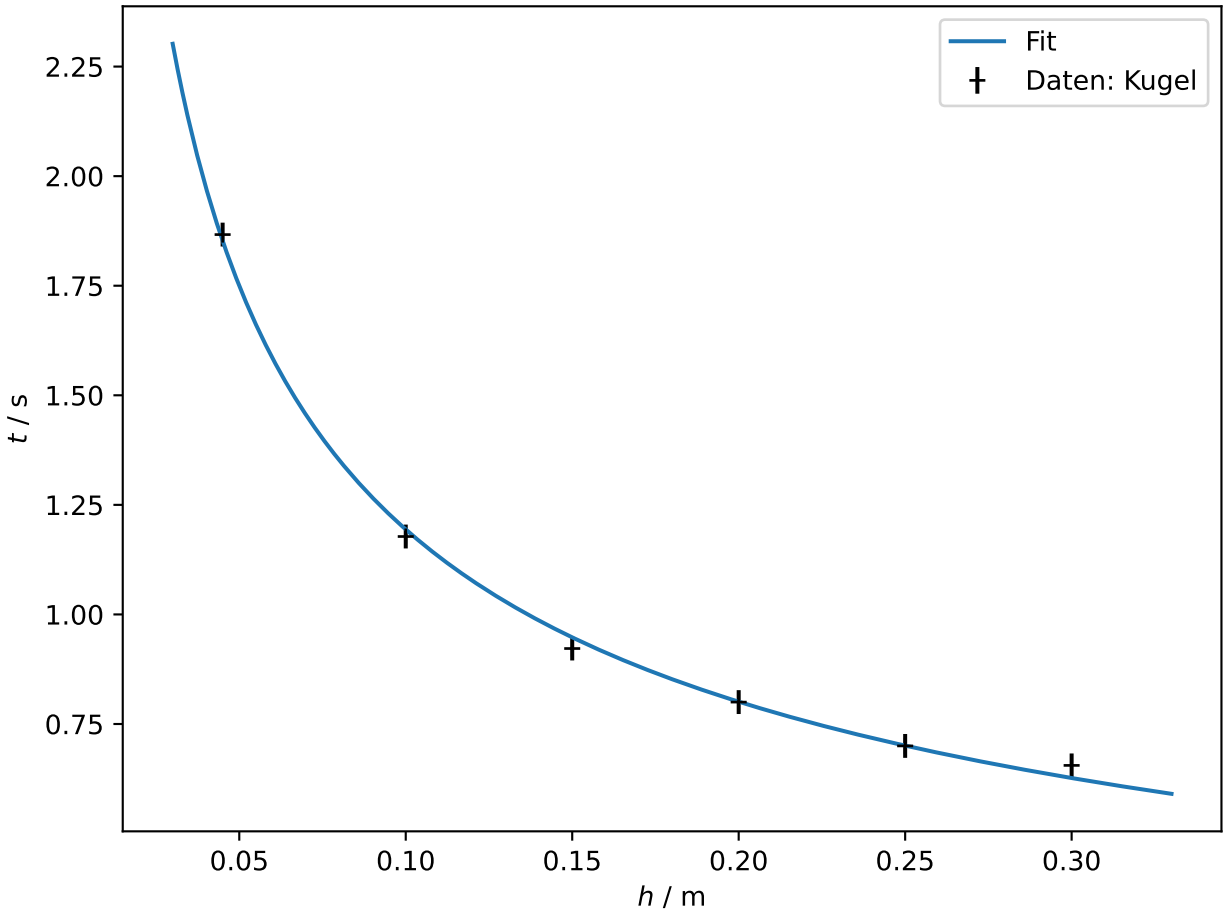

Abbildung 4: Dargestellt sind die für je eine Höhe gemittelten Messwerte aus Tabelle 2 für den Kugel, zusammen mit einer Ausgleichsfunktion der Form (2) für die Bestimmung des Trägheitsmoments I_{K}. Die Parameter der Ausgleichsrechnung sind in (9) angegeben.

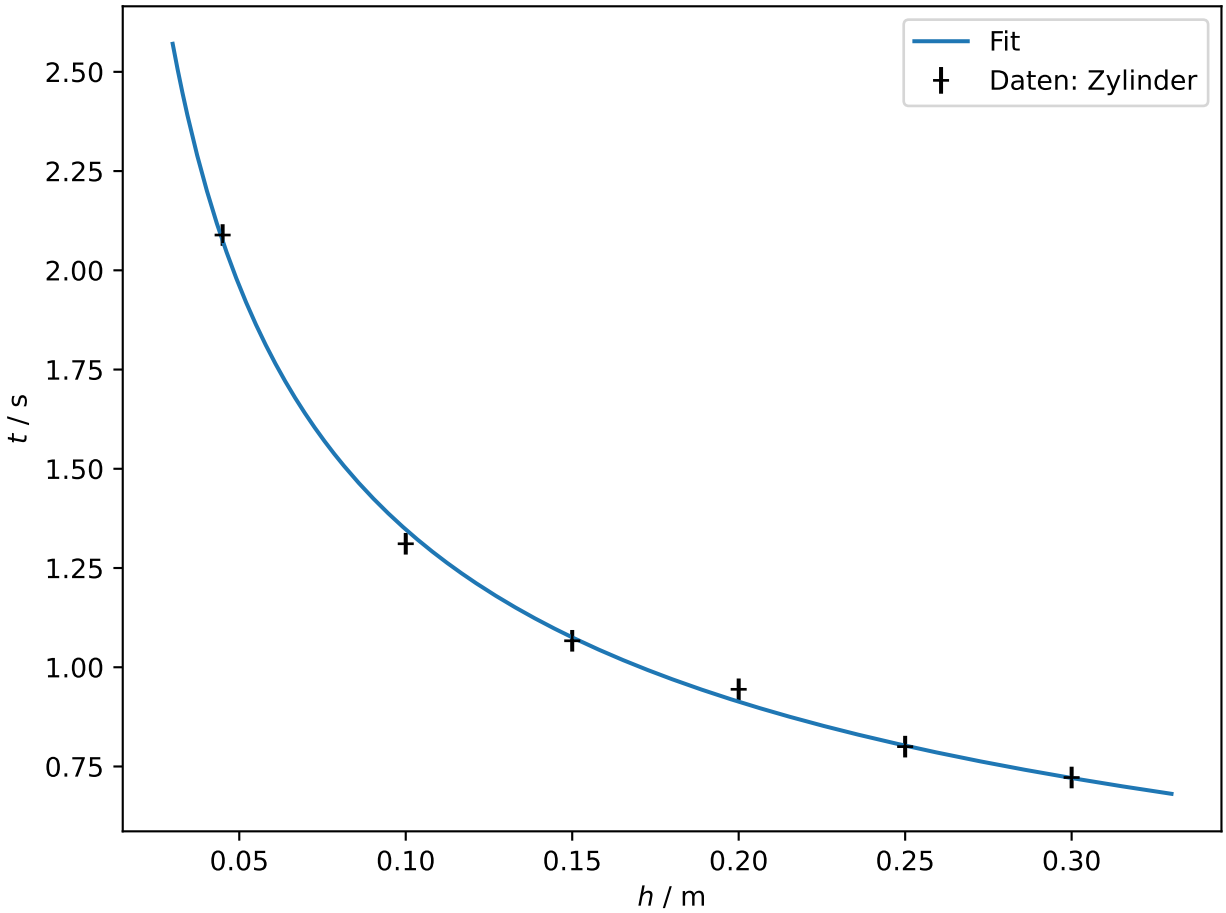

Abbildung 5: Dargestellt sind die für je eine Höhe gemittelten Messwerte aus Tabelle 2 für den Zylinder, zusammen mit einer Ausgleichsfunktion der Form (2) für die Bestimmung des Trägheitsmoments I_Z. Die Parameter der Ausgleichsrechnung sind in (10) angegeben.

4 Diskussion

TODO: Diskussion fertig machen ;-)

Notizen:

Bestimmung von g:

Fits

Abbildung 2

Abbildung 3

passen zu den Messwerten.

Die Fit parameter (7) (8)

passen zum theoretischen Wert $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ => TODO: Abweichungen berechnen

Die übereinstimmung der Fitparameter t0, weist auf eine systematische Unsicherheit => TODO: Berechnung des Offsets in Frames

Analog für die Bestimmung von I:

Fits:

Abbildung 4

Abbildung 5

(9)

(10)

(6)

=> TODO: Abweichungen berechnen

Literatur

[1] *Anleitung: Versuch zur schiefen Ebene*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.

[2] Galileo Galilei. *Il Saggiatore*. 1623. URL: `https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=354802&seq=13`.

[3] Friedhelm Kuypers. *Klassische Mechanik*. John Wiley & Sons, 2016.