1 Biot–Savart

Das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ am Ort $\boldsymbol{r}$ eines stromdurchflossenen Leiters ergibt sich zu

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \, \mathrm{d}V'. \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet $\boldsymbol{j}$ die Stromdichte am Ort $\boldsymbol{r}'$ und μ_0 die magnetische Feldkonstante.

2 Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2} \tag{2}$$

3 Die vier Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B} \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \boldsymbol{E} \tag{4}$$

4 Wellengleichung

Im Vakuum gelten $\rho = 0$ und $\boldsymbol{j} = 0$, womit sich die Maxwellgleichungen zu

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{6}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B} \tag{7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \boldsymbol{E} \tag{8}$$

reduzieren. Nach erneuter Anwendung der Rotation auf (7) ergibt sich

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla \times (-\partial_t \boldsymbol{B}) \,. \tag{9}$$

Nach dem Satz von Schwarz lassen sich die partiellen Ableitungen vertauschen, was zu

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\partial_t (\nabla \times \boldsymbol{B}) \,. \tag{10}$$

führt. Wir setzen auf der rechten Seite (8) ein:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \boldsymbol{E}. \tag{11}$$

Aus der linken Seite wird mit

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \Delta \boldsymbol{E} \tag{12}$$

und Ausnutzen von (5)

$$-\Delta \boldsymbol{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \boldsymbol{E}. \tag{13}$$

Dies ist die Wellengleichung für das elektrische Feld, in der sich die Lichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{14}$$

identifizieren lässt. Damit können wir

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \boldsymbol{E} = 0 \tag{15}$$

schreiben.

5 Wellengleichung

Ebene Welle:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A = 0 \tag{16}$$

Eine Lösung:

$$A = A_0 \exp(\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{x} - \omega t)) \tag{17}$$

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit:

$$v_{\mathrm{Gr}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \qquad\qquad v_{\mathrm{Ph}} = \frac{\omega}{k} \tag{18}$$

6 Multipolentwicklung

$$\varPhi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} Q_{kl} \frac{r_k r_l}{r^5} + \cdots \right), \tag{19}$$

wobei

$$Q_{kl} = \sum_{i=1}^{n} q_i \left(3 r_{ik} r_{il} - r_i^2 \delta_{kl} \right)$$

7 Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{20}$$

8 Harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{21}$$

Reelle Lösung:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) \tag{22}$$

mit

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \tag{23}$$